

Πχ 1

Μπορεί το πολυώνυμο $15x^2 + 7x - 27$ να παραγοντοποιηθεί πάνω από τας ακεραίους;

Απ: Θα πρέπει το πολυώνυμο που δίνεται, να γραφεί ως γινόμενο δύο άλλων πολυωνύμων με διάφορους συντελεστές και βαθμούς μικρότερους από το βαθμό του αρχικού.

Διλαδή, $15x^2 + 7x - 27 = a(x+\beta)(x+\gamma)$, $\forall a, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$

$$\text{Άρα, τα } -\beta \text{ και } -\gamma \text{ πύες} \Leftrightarrow \begin{cases} 15(-\beta)^2 + 7(-\beta) - 27 = 0 & \textcircled{1} \\ 15(-\gamma)^2 + 7(-\gamma) - 27 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

①

$$3|15 \Rightarrow 3|15\beta^2$$

$$3|-27 \Rightarrow 3|15\beta^2 - 27$$

$$3|0 \Rightarrow 3|15\beta^2 - 7\beta - 27$$

$$\left. \begin{array}{l} 3|15\beta^2 - 27 \\ 3|15\beta^2 - 7\beta - 27 \end{array} \right\} 3|15\beta^2 - 7\beta - 27 - (15\beta^2 - 27) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3|-7\beta \\ 3 \text{ πιντος} \end{array} \right\} 3 \nmid 7 \quad \text{και} \quad \left. \begin{array}{l} 3|\beta \\ 3 \text{ πιντος} \end{array} \right\} 3|\beta \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : \beta = 3k$$

$$\text{Άρα, } 15 \cdot (3k)^2 - 7 \cdot 3k - 27 = 0 \Rightarrow 5 \cdot 9k^2 - 7k - 9 = 0$$

$$9|0 = 5 \cdot 9k^2 - 7k - 9$$

$$9|5 \cdot 9k^2 - 9 \Rightarrow 9|-7k \Rightarrow 3|9 \text{ και } 3|9 \text{ και } 9|-7k \Rightarrow 3|-7k \Rightarrow 3|k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \nmid 7, \text{ Άρα, } 3|k \Rightarrow k = 3\lambda \Rightarrow k = 9\lambda$$

$$\beta = 3 \cdot 9\lambda = 27\lambda$$

$$\text{Άρα, } 15 \cdot (27\lambda)^2 - 7 \cdot 27\lambda - 27 = 0 \Rightarrow 15 \cdot 27\lambda^2 - 7\lambda - 1 = 0$$

όπου είναι μια σαφώς καλύτερη σχέση λ-ου:

$$\left. \begin{array}{l} 2|15 \cdot 27\lambda^2 \\ \lambda|0 = 15 \cdot 27\lambda^2 - 7\lambda - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2|15 \cdot 27\lambda^2 \\ \lambda|0 = 15 \cdot 27\lambda^2 - 7\lambda - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2|-1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\text{Άλλα, } 15 \cdot 27 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 - 1 \neq 0 \text{ και } 15 \cdot 27 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 1 \neq 0$$

Άρα, δεν υπάρχει ακεραία ρίζα.

(10)

π.χ 2

Να εξετασθεί εάν το $3 \mid 2^{2n}-1$, $\forall n \geq 1$

Απ:

$$3 \mid 2^{2n}-1 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) : 2^{2n}-1=3k$$

$$\text{Αλλά, } (2^{2n}-1) = (2^2)^n - 1^n = (2^2-1)((2^2)^{n-1} + (2^2)^{n-2} + \dots + 1)$$

$$\text{Άρα, } 3 \mid 2^{2n}-1.$$

π.χ 3

ΝΑΟ $4 \nmid n^2+2$

Απ:

$$\text{Αν } 4 \mid n^2+2 \Rightarrow 2 \mid n^2+2$$

ή μεσω της ανιστοδομοτροφας γνωστως

$$\text{Αν } 2 \nmid n^2+2 \Rightarrow 4 \nmid n^2+2$$

• Εστω n άρτιος τότε και ο n^2 άρτιος

$$\text{δηλ. } n=2k \Rightarrow n^2=2 \cdot (2k^2) \Rightarrow n^2+2=2(2k^2)+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2+2=2(2k^2+1) \text{ άρτιος}$$

• Εστω n περιττός τότε και ο n^2 περιττός

$$\text{δηλ. } n=2k+1 \Rightarrow n^2=(2k+1)^2 \Rightarrow n^2=4k^2+4k+1=$$

$$= 2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2+2=2(2k^2+2k)+2+1$$

$$= 2(2k^2+2k+1)+1 \text{ περιττός.}$$

Αν ο n περιττός τότε ο n^2+2 δεν διαιρείται

με το 2 ούτε με το 4.

Αν ο n άρτιος τότε εστω $4 \mid n^2+2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \mid n^2+2 = 2(2k^2+1) \Leftrightarrow (\exists v \in \mathbb{Z}) : 2(2k^2+1)=4v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2k^2+1}_{\text{περιττός}} = 2v \Rightarrow 2 \nmid 2k^2+1 \text{ Απονο.}$$

ΑΡΧΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΛΛΟΓΗΣ

Πρώτος που τη χρησιμοποίησε ήταν ο Marrolico (1595)
 Έστω μια πρόταση $P(n)$ που εξαρτάται από το φυσικό n
 Έστω α φυσικός σταθερός. Αν τα επόμενα βήματα είναι
 αληθή:

1) $P(a)$ αληθές

2) Για κάθε $k \geq a$, αν η $P(k)$ είναι αληθής τότε και
 η $P(k+1)$ είναι αληθής

Τότε και η $P(n)$ θα είναι αληθής όλα τα $n \geq a$